

Regime Switching Model : une approche « pseudo » multivariée

A. Zerrad¹, R&D, Nexialog Consulting, Juin 2015
azerrad@nexialog.com

Les crises financières survenues dans les trente dernières années et les tendances cycliques des marchés financiers remettent en question, au sens large, les outils classiques d'aide à la décision. Les marchés financiers, peuvent se trouver dans des états très différents et peuvent être caractérisés par des changements de comportement très brutaux. Les modèles classiques, gaussiens notamment, sont très critiqués dans leurs capacités médiocres à capturer de tels phénomènes complexes.

Les modèles, intégrant ce concept de changement de régimes, sont bien appropriés pour capter le comportement dépendant du temps des prix des instruments financiers : moyennes, volatilités, coefficients d'asymétrie et d'aplatissement, structure de dépendances, essentiels à prendre en compte dans les modèles d'allocation d'actifs. La dépendance entre les actifs financiers a tendance à s'aggraver lors des périodes turbulentes, ce qui implique que supposer improprement une stabilité de dépendance peut conduire à une sous-estimation significative de la survenance des rendements conjointement négatifs².

Ces modèles connus dans la littérature sous le nom de Hidden Markov models (HMM³⁴), considèrent que le processus de prix d'actifs est distribué selon un mélange de lois de probabilités, dont les transitions sont conditionnées par la réalisation d'une variable aléatoire discrète latente ou inobservée vérifiant la propriété markovienne⁵.

Cependant, le calibrage de tels modèles reste une tâche complexe et pourrait vite engendrer de nombreux problèmes de robustesse et de perte de pragmatisme. Ceci se pose notamment lorsqu'il s'agit de calibrer de tels modèles sur des processus multivariés de dimension élevée; un modèle HMM gaussien multivarié à 6 composantes et à deux régimes latents, nécessite l'estimation de 57

¹ Ali Zerrad, Responsable du pôle R&D de Nexialog et Consultant en Risk Management et en Finance Quantitative.

² Sheikh et Quiao (2010)

³ Pour plus de détails sur le sujet, le lecteur intéressé pourrait consulter : Zucchini M., MacDonald I. L., Hidden Markov Models for Time Series- An Introduction Using R, Chapman & Hall CRC Monographs on Statistics & Applied Probability, 2009.

⁴ J. Bulla & I. Bulla., Stylized facts of financial time series and hidden semi-Markov models, Computational Statistics & Data Analysis, 51, 2192-2209, 2006

⁵ Un processus stochastique vérifie la propriété de Markov si et seulement si la distribution conditionnelle de probabilité des états futurs, étant donnés les états passés et l'état présent, ne dépend en fait que de l'état présent et non pas des états passés (absence de « mémoire »).

paramètres ; ce qui pourrait conduire à des estimations moins robustes et mène à des prédictions, de changement de régimes, de qualité médiocre, étant donné que l'erreur d'estimation augmente avec le nombre de paramètres. Nombreux investisseurs optent donc, pour des méthodes simples et utilisent plutôt des indicateurs simples, intégrant des prévisions économiques, afin de détecter tout changement futur de régime.

L'objectif de cette étude est de présenter un remède à telle problématique consistant à modifier légèrement la vraisemblance du modèle, HMM, dans sa version originale, en supposant l'indépendance entre les actifs à modéliser. Ceci signifie, dans le cadre d'un modèle à distributions conditionnelles gaussiennes, l'utilisation des matrices de covariance diagonales (une autre alternative consisterait à utiliser des matrices de covariance « block-diagonales » limitant l'hypothèse d'indépendance à seulement certains des actifs considérés). Cette hypothèse, quoi qu'elle parait forte, n'impacte en rien l'objectif final de la modélisation consistant à prédire le changement des régimes et non pas les grandeurs des variations des prix des actifs.

Nous allons montrer que cette approche pourrait bien fournir des résultats aussi satisfaisants que l'approche originale.

Nous rappelons que dans le cas des distributions multivariées⁶, la vraisemblance du modèle se formule comme ceci :

$$L_T = \pi P(X_1) \Gamma P(X_2) \dots \Gamma P(X_T),$$

avec $(X_t)_{t \in 1 \dots T}$ un vecteur à valeur dans \mathbb{R}^J , T étant la taille de l'échantillon :

$$X_t = \begin{pmatrix} X_{t1} \\ \vdots \\ X_{tj} \end{pmatrix},$$

$P(X_t)$ une matrice diagonale composée des densités conditionnelles relatives aux régimes $(1, \dots, m)$.

$$P(X_t) = \begin{pmatrix} p(X_t, \theta_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p(X_t, \theta_m) \end{pmatrix}$$

Et Γ la matrice de transition du processus markovien latent.

Dans le cadre de l'approche considérée, que nous notons HMM_d contre HMM_f pour un modèle HMM multivarié à matrice de covariance complète, $p(X_t, \theta_j)$ ($= \Pr(X_t = x_t / S_t = j)$), S_t représente le processus markovien latent, se reformule par :

$$p(X_t, \theta_j) = p_1(X_{t1}, \theta_{j1}) \dots p_J(X_{tJ}, \theta_{jJ})$$

Notons qu'il n'est pas nécessaire de considérer la même distribution conditionnelle $p_k(X_{tk}, \theta_{jk})$ pour toutes les composantes $X_{tk, k \in (1:J)}$.

⁶ Zucchini M., MacDonald I. L., Hidden Markov Models for Time Series- An Introduction Using R, Chapman & Hall CRC Monographs on Statistics & Applied Probability, 2009.

Afin d'évaluer la pertinence d'une telle approche, sans perte de généralité, nous considérons un vecteur composé de deux composantes aléatoires que nous modéliserons à l'aide d'un modèle HMM_f bi varié à deux régimes. L'objectif est de comparer, sur ce cas simple, les prédictions des changements de régimes, fournis par les deux modèles HMM_f et HMM_d .

Nous considérons des distributions conditionnelles gaussiennes $N(\mu_j, \Sigma_j)_{j \in \{1,2\}}$. Nous fixons arbitrairement $\mu_j = (\mu_{1,j}, \dots, \mu_{J,j})$ et $\text{diag}(\Sigma_j) = (\sigma_{1,j}^2, \dots, \sigma_{J,j}^2)^T$ (respectivement les moyennes et les variances conditionnelles des densités marginales) et nous faisons varier la corrélation ρ_2 , relatif au deuxième régime, que nous considérons volatile, de 0.1 à 0.9, tout en fixant ρ_1 respectivement à 0, -0.2 et 0.2.

Pour chaque valeur de ρ_2 et pour i allant de 1 jusqu'à B (B étant un nombre de simulations assez élevé pour assurer la convergence du paramètre d'intérêt) :

- 1) Nous simulons, selon un modèle HMM_f , un échantillon de taille T (nous fixons T à 3900) ;
- 2) Pour chaque distribution simulée, nous estimons les paramètres du modèle HMM_f , à l'aide de l'algorithme EM⁷, et nous faisons appel à l'algorithme de Viterbi⁸ pour identifier le processus des régimes latents que nous notons S_f^i ;
- 3) Pour la même distribution simulée, nous y calibrons le modèle HMM_d et nous faisons appel à l'algorithme Viterbi, dans sa version modifiée tenant compte de la vraisemblance présentée ci-haut, pour identifier les régimes cachés que nous notons S_d^i .
- 4) Nous calculons ainsi le taux d'erreur, que nous notons T_d , relatif au modèle considéré en comparant les deux distributions des régimes identifiés. Formellement, il s'agit d'évaluer :

$$T_d = \frac{1}{B} \sum_i^B \sum_j^T (S_f^{i,j} - S_d^{i,j})$$

Les résultats obtenus, pour un nombre de simulation égale à 9999, sont représentés dans la figure 1.

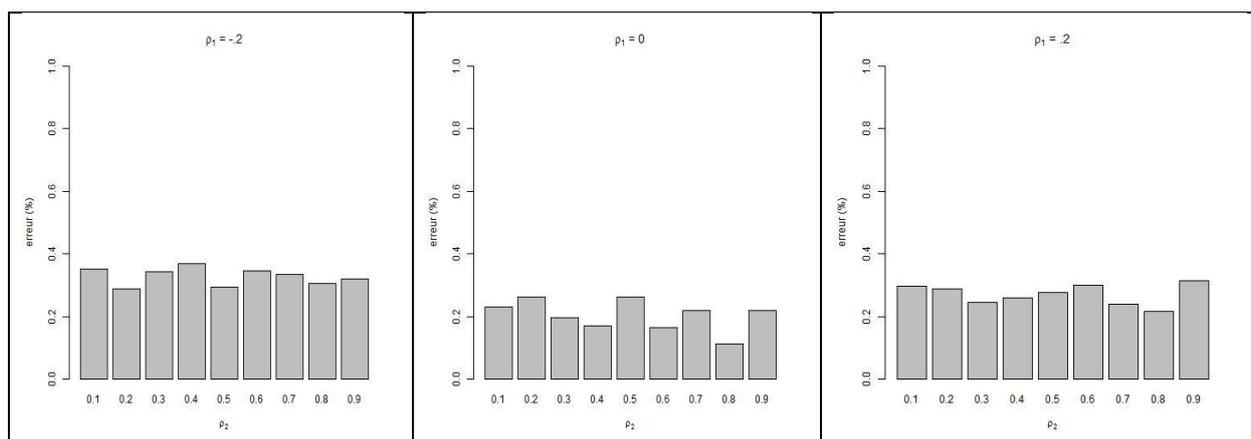


Figure 1 : taux d'erreur d'identification des régimes du modèle HMM_d calculé par rapport aux régimes identifiés par HMM_f ; application sur deux actifs.

Nous remarquons que pour les différents cas de figures considérés, le taux d'erreur commise par le modèle HMM_d oscille autour de 0.4%. L'approche ainsi considérée permet de réduire le nombre de

⁷ Esperance maximisation

⁸ L. R. Rabiner. A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition. Proceedings of the IEEE 77(2):257–286, février 1989.

paramètres à estimer tout en fournissant un résultat aussi satisfaisant que celui obtenu par un modèle HMM_f .

Afin de confirmer ces résultats, nous reprenons la même étude présentée ci-haut, mais en considérant maintenant une distribution multivariée à trois composantes. Les résultats obtenus sont représentés dans figure 2:

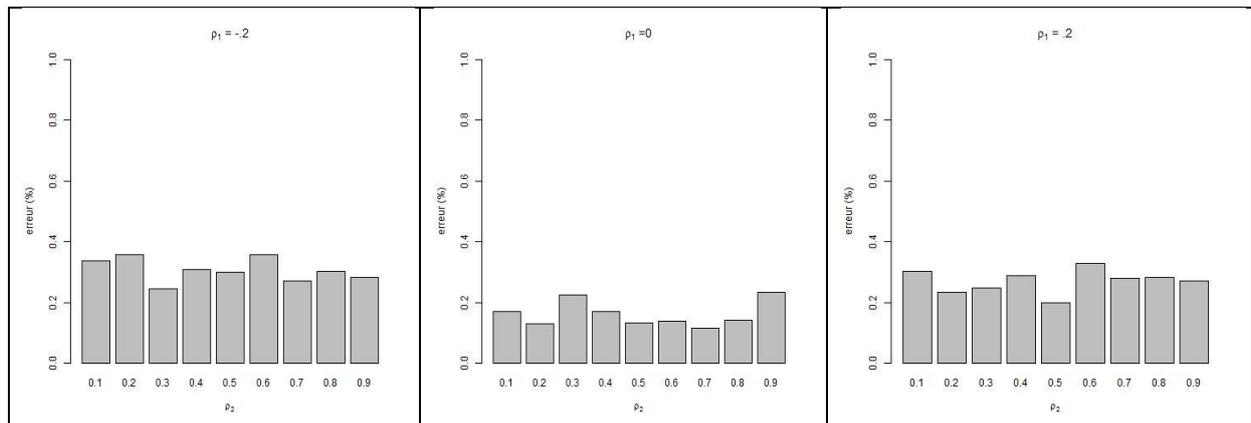


Figure 2: taux d'erreur d'identification des régimes du modèle HMM_d calculé par rapport aux régimes identifiés par HMM_f ; application sur trois actifs.

D'après les résultats obtenus, les mêmes conclusions faites ci-haut restent valables.

A ce stade, nous considérons des données réelles, nous limitons l'analyse à trois actifs⁹ : $Equity_1$, $Bond_1$ et $Commodity_1$. Nous considérons dans un premier temps un modèle HMM_f à matrice de covariance complète. Les paramètres estimés, à l'aide de l'algorithme EM, figurent dans le tableau 1. Le nombre de régimes à considérer a été fixé à 2 régimes. Notons toutefois qu'il est possible de considérer un nombre de régimes plus élevé, mais ceci n'impactera pas l'objectif de la présente étude. Le modèle résultant montre clairement la présence effective de deux régimes distincts, une faible volatilité associée à un rendement positif pour le premier régime, et une volatilité élevée associée à un rendement négatif pour le deuxième régime indiquant que les périodes de turbulence sont généralement caractérisées par des faibles rendements en moyenne. Les deux régimes sont quasiment identifiés par leurs variances comme la différence au niveau de leurs moyennes est plus ou moins similaire à celle de leurs variances. La différence des moyennes est une propriété indispensable pour que le modèle soit capable de reproduire l'autocorrélation d'ordre 1 ainsi que le skewness (le coefficient de dissymétrie). En analysant les probabilités de transition, il paraît que le premier régime est plus persistant que le deuxième avec une probabilité s'élevant à 0.96 contre 0.87.

Notons que la corrélation entre le premier actif et le troisième croît en régime volatile indiquant un phénomène de contagion, et celle entre le premier actif et le deuxième chute davantage indiquant la présence d'un phénomène de découplage. Ceci confirme le fort lien entre les actifs et les changements de régime.

⁹ Les codes bloomberg sont respectivement : NDUACWF, JHDCGBIG, SPGSCITR.

HMM _f	$\mu * 10^4$	$\sigma * 10$	Corrélation	Γ_{ii}	π^{10}	δ^{11}
Régime 1	(6.09 1.89 5.79)	(0.06 0.01 0.11)	$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ -0.25 & 1 & \cdot \\ 0.22 & -0.06 & 1 \end{pmatrix}$	0.96	0.80	1
Régime 2	(-18.3 2.09 -24.01)	(0.18 0.02 0.23)	$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ -0.46 & 1 & \cdot \\ 0.43 & -0.26 & 1 \end{pmatrix}$	0.87	0.19	0

Tableau 1 : paramètres estimés du modèle HMM_f.

Considérons maintenant le modèle HMM_d en supposant l'indépendance entre les trois actifs. Les paramètres estimés à l'aide de l'algorithme EM sont représentés dans le tableau 2.

HMM _d	$\mu * 10^4$	$\sigma * 10$	Γ_{ii}	π	δ
Régime 1	(6.72 1.76 6.39)	(0.06 0.01 0.11)	0.95	0.80	1
Régime 2	(-20.7 2.61 -26.38)	(0.19 0.02 0.23)	0.82	0.19	0

Tableau 2 : paramètres estimés du modèle HMM_d.

Les estimations obtenues sont similaires, en termes de structure, à celles obtenues avec un modèle HMM_d. Notons que le deuxième régime, du modèle HMM_d, semble légèrement moins persistant que celui du modèle HMM_f, toutefois, les régimes des deux modèles présentent des probabilités stationnaires similaires.

Afin d'évaluer à quel point la matrice de corrélation est conservée ou non par le modèle HMM_d, nous estimons les matrices de corrélation empiriques moyennant les observations relatives à chaque régime. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau 3.

HMM _d	Corrélation
Régime 1	$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ -0.22 & 1 & \cdot \\ 0.19 & -0.05 & 1 \end{pmatrix}$
Régime 2	$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ -0.50 & 1 & \cdot \\ 0.46 & -0.28 & 1 \end{pmatrix}$

Tableau 3 : corrélations empiriques du modèle HMM_d.

¹⁰ π représente la probabilité stationnaire du modèle, s'interprète usuellement comme la fraction du temps passé en chaque régime.

¹¹ δ représente la probabilité d'émission des régimes.

La structure de corrélation est bien conservée. Il est également intéressant de noter que les corrélations empiriques obtenues sont du même ordre que celles modélisées explicitement par le modèle HMM_f .

A ce stade, nous comparons les distributions des régimes identifiées par les deux modèles. Nous évaluons dans un premier temps le T_d relatif aux régimes cachés, conduisant les données réelles étudiées. Ensuite, à travers des simulations basées sur les paramètres estimés, nous construisons la distribution empirique du T_d . Les résultats obtenus sont représentés dans le graphique ci-dessous.

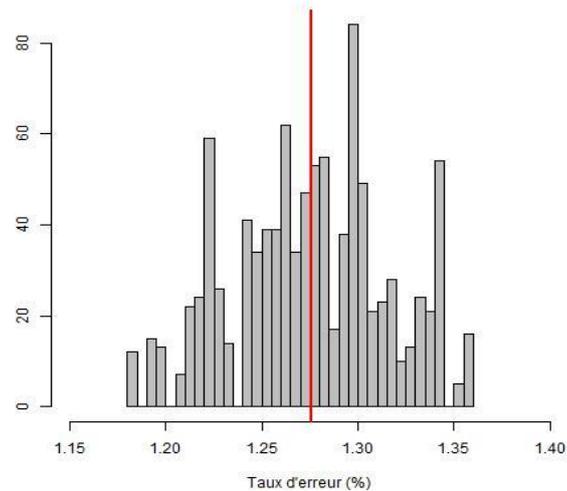


Figure 3 : distribution empirique du taux d'erreur T_d sur des échantillons simulés à travers les modèles, HMM_d et HMM_f , calibrés sur des données réelles. La droite rouge correspond au taux d'erreur relatif aux données réelles. Le nombre de simulations effectuées est de l'ordre de 9999.

Le taux d'erreur T_d oscille autour de 1.5% ; le modèle HMM_d permet ainsi une réduction du nombre de paramètres à estimer tout en fournissant une identification des régimes aussi satisfaisante que celle du modèle HMM_f .

Il est intéressant de finir cette étude en abordant la question de la stabilité des estimations des paramètres relatifs au modèle étudié. Pour ce faire, nous effectuons des simulations multivariées basées sur les paramètres, du modèle HMM_f , estimés ci-haut, et nous re-estimons ces derniers pour chaque distribution simulée et ceci pour les deux modèles considérés HMM_f et HMM_d . Les figures 4 et 5 représentent l'estimation des paramètres μ et σ relatifs au deuxième régime pour les 99 premières simulations ; la figure 6 représente l'estimation des probabilités de rester dans le même régime pour les mêmes simulations. Notons que nous avons effectué 9999 simulations au total.

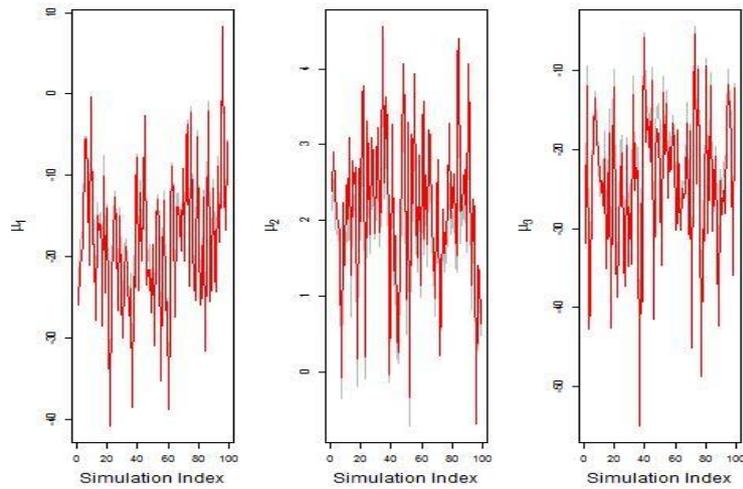


Figure 4 : les 99 premières estimations du paramètre μ correspondant au deuxième régime. Sont représentées en rouge les estimations relatives au modèle HMM_f , en gris, celles correspondant au modèle HMM_d

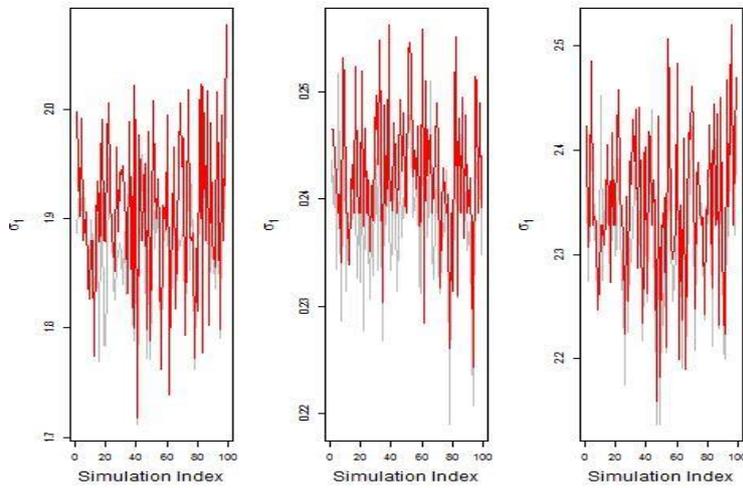


Figure 5 : les 99 premières estimations du paramètre σ correspondant au deuxième régime. Sont représentées en rouge les estimations relatives au modèle HMM_f , en gris, celles correspondant au modèle HMM_d

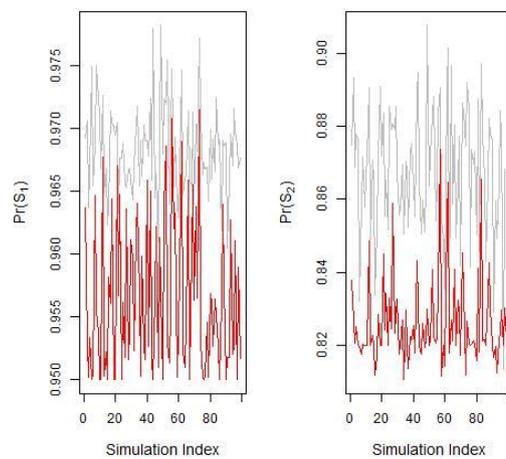


Figure 6 : les 99 premières estimations des probabilités de rester au même régime. Sont représentées en rouge les estimations relatives au modèle HMM_f , en gris, celles correspondant au modèle HMM_d .

En vertu de ces résultats, nous pourrions conclure que le modèle HMM_d fournit des estimations très légèrement plus stables que celles obtenues par le modèle HMM_f . En effet, les écarts types (que nous notons Sd) des estimations obtenues montrent une légère préférence pour le modèle HMM_d :

	$Sd(\mu) \cdot 10^4$			$Sd(\sigma) \cdot 10^4$			$Sd(Pr(S)) \cdot 10^2$	
	μ_1	μ_2	μ_3	σ_1	σ_2	σ_3	$Pr(S_1)^{12}$	$Pr(S_2)^{13}$
HMM_d	0.79	0.10	0.91	0.58	0.06	0.72	0.35	1.76
HMM_f	0.86	0.10	0.96	0.74	0.06	0.78	1.18	0.60

Tableau 4 : écarts type des estimations des paramètres μ et σ relatifs au deuxième régime ainsi que ceux des probabilités de rester dans le même.

A travers cette étude, il paraît que supposer l'indépendance des composantes de la distribution multivariée à calibrer par un modèle HMM_d n'introduit pas une perte significative en terme de qualité de prédiction des régimes cachés. Ceci s'avère fortement utile lorsqu'il s'agit de modéliser une distribution multivariée de grande dimension, chose qui est fréquent dans le domaine de l'allocation d'actif. Il faut toutefois noter qu'il serait intéressant de considérer d'autres tests afin de confirmer ou infirmer les conclusions faites.

¹² Nous notons par $Pr(S_1)$ la probabilité de rester dans le régime 1.

¹³ La probabilité de rester dans le régime 2.